ĐÁP ÁN TOÁN CAO CẤP A2

Mã môn học: MATH130201

Ngày thi: 04/01/2016

Câu		Nội dung	Điểm
I			**3,00**
	1	Lấy $u=(x_1,x_2,x_3), v=(y_1,y_2,y_3)\in M, \alpha\in\mathbb{R}$. Do $u,v\in M$ nên $x_1-2x_2+x_3=0; y_1-2y_2+y_3=0$.	**0,25**
		Ta có $u+v=(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3)$ thỏa $(x_1+y_1)-2(x_2+y_2)+(x_3+y_3)$ $=(x_1-2x_2+x_3)+(y_1-2y_2+y_3)=0$, suy ra $u+v\in M$.	**0,25**
		Ta có $\alpha u=(\alpha x_1,\alpha x_2,\alpha x_3)$ thỏa $\alpha x_1-2\alpha x_2+\alpha x_3=\alpha(x_1-2x_2+x_3)=\alpha.0=0$, suy ra $\alpha u\in M$. Do u,v lấy tùy ý trong M, $\alpha\in\mathbb{R}$ tùy ý nên M là 1 không gian vecto con của $\mathbb{R}^3$.	**0,25**
		$x_1-2x_2+x_3=0\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=2a-b\\x_2=a\\x_3=b\end{cases}\quad(a,b\in\mathbb{R})$	**0,25**
		Hệ nghiệm cơ bản: $\alpha_1=(2;1;0)$, $\alpha_2=(-1;0;1)$. Một cơ sở của M: $\{\alpha_1,\alpha_2\}$, $\dim M=2$.	**0,5**
	2	$\overline{A}=\left[\begin{array}{cccc\|c}1&0&-1&1&1\\2&1&2&3&2\\-1&1&-m&0&-1\\1&3&1&m&m\end{array}\right]\to\dots$ $\to\left[\begin{array}{cccc\|c}1&0&-1&1&1\\0&1&4&1&0\\0&0&-10&m-4&m-1\\0&0&0&(m-4)(m+5)&(m-1)(m+5)\end{array}\right]$	**0,75**
		Khi $m=4$, do $r(A)=3<4=r(\overline{A})$ nên hpt vô nghiệm.	**0,25**
		Khi $m=-5$, do $r(A)=r(\overline{A})=3<4$ (số ẩn) nên hệ vô số nghiệm $\left(\frac{16-19a}{10},\frac{-12+13a}{5},\frac{6-9a}{10},a\right), a\in\mathbb{R}$.	**0,25**

		Khi $\begin{cases} m \neq 4 \\ m \neq -5 \end{cases}$, $r(A) = r(\overline{A}) = 4$ (=số ẩn), hệ có nghiệm duy nhất $\left(\dfrac{-3}{m-4}, \dfrac{1-m}{m-4}, 0, \dfrac{m-1}{m-4}\right)$.	**0,25**
II			**2,00**
		Ma trận của dạng toàn phương: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.	**0,25**
		Giá trị riêng: $\lambda = 3, \lambda = -3$.	**0,25**
		Ứng với $\lambda = 3$, vector riêng $X = \begin{bmatrix} a+b \\ a \\ b \end{bmatrix} \left(a^2 + b^2 \neq 0\right)$, suy ra vector riêng cơ sở $X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Trực chuẩn: $Y_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}, Y_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{bmatrix}$.	**0,5**
		Ứng với $\lambda = -3$, vector riêng $X = \begin{bmatrix} -c \\ c \\ c \end{bmatrix} \left(c \neq 0\right)$, suy ra vector riêng cơ sở: $X_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Trực chuẩn: $Y_3 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$.	**0,25**
		Đặt $P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$, $D = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$. Đặt $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$, phép biến đổi trực giao $X = PY$ đưa dạng toàn phương f về dạng chính tắc $f_{CT}\left(y_1, y_2, y_3\right) = 3{y_1}^2 + 3{y_2}^2 - 3{y_3}^2$.	**0,25**

		Do $\lambda_1 = 3 > 0, \lambda_2 = 3 > 0, \lambda_3 = -3 < 0$ nên f không xác định dấu và $r(f) = 3$.	**0,5**
III			**2,50**
	1	Do A là cơ sở của $P_2[x]$ nên A là hệ sinh của $P_2[x]$, suy ra $P_2[x] \supset \langle A \cup \{u_4\} \rangle \supset \langle A \rangle = P_2[x]$. Vậy $\langle A \cup \{u_4\} \rangle = P_2[x]$ hay $A \cup \{u_4\}$ là hệ sinh của $P_2[x]$.	**0,5**
		Do $A \cup \{u_4 = 0 + 0x + 0x^2\}$ có chứa vector 0 nên phụ thuộc tuyến tính, suy ra hệ này không là cơ sở của $P_2[x]$.	**0,5**
	2	$P_{A\to B} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ -2 & -1 & -2 \\ -1 & -3 & -3 \end{bmatrix}$	**1**
	3	$[u]_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow u = 2u_2 + u_3 = 2(1 + x + x^2) + (x - x^2) = 2 + 3x + x^2$	**0,5**
IV			**2,50**
	1	$F = 2e^z + z^5 - xy^3 + 6x^2 - xy - 2$; $F'_x = -y^3 + 12x - y$; $F'_y = -3xy^2 - x$; $F'_z = 2e^z + 5z^4$.	**0,5**
		$z'_x = -\dfrac{-y^3 + 12x - y}{2e^z + 5z^4}$; $z'_y = \dfrac{3xy^2 + x}{2e^z + 5z^4}$.	**0,25**
		Suy ra: $z'_x(0;1) = \dfrac{2}{2} = 1$; $z'_y(0;1) = 0$. Do đó $dz(0;1) = 1dx + 0dy$.	**0,25**
	2	Ta có $\begin{cases} f'_x = 6xy - 6x = 0 \\ f'_y = 3x^2 + 3y^2 - 6y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \vee y = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$. Hàm f có 4 điểm dừng: $M_1(0;0), M_2(0;2), M_3(1;1), M_4(-1;1)$.	**0,5**
		$A = f''_{xx} = 6y - 6$; $B = f''_{xy} = 6x$; $C = f''_{yy} = 6y - 6$; $\Delta = (6y - 6)^2 - 36x^2$. Tại $M_1(0;0)$, do $\Delta = 36 > 0, A = -6 < 0$ nên f đạt cực đại tại M_1.	**0,25**
		Tại $M_2(0;2)$, do $\Delta = 36 > 0; A = 6 > 0$ nên f đạt cực tiểu tại M_2.	**0,25**
		Tại $M_3(1;1)$, do $\Delta = -36 < 0$ nên f không đạt cực trị tại M_3.	**0,25**
		Tại $M_4(-1;1)$, do $\Delta = -36 < 0$ nên f không đạt cực trị tại M_4.	**0,25**